Nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Forme algébrique

Tout nombre complexe peut s'écrire de manière unique sous la forme $z = a + bi$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et i tel que $i^2 = -1$.
L'ensemble des nombres complexe est noté $\mathbb{C}$.

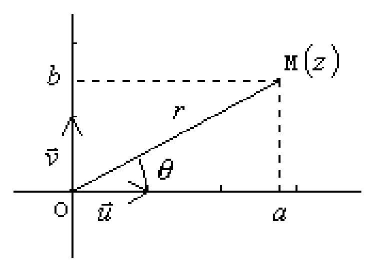
a est la partie réelle de z. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$.

b est la partie imaginaire de z. $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

$\bar{z} = a - bi$ est le conjugué de z.

Représentation graphique

$M(a,b)$ est l'image de z
$z = a + bi$ est l'affixe de M
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$



Module et argument

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, représente la distance $r = OM$
$\arg(z)$ est une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$
La distance AB est $AB = |z_B - z_A|$
$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$

Forme trigonométrique

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r = |z| \in \mathbb{R}^{*+}$, $\theta \equiv \arg(z) \in \mathbb{R}$

Forme exponentielle

$z = re^{i\theta}$ $r = |z| \in \mathbb{R}^{*+}$, $\theta \equiv \arg(z) \in \mathbb{R}$

Réels, imaginaires purs

z est réel	$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$	$\Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0\ [\pi]$
z est un réel positif	$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$ et $\mathrm{Re}(z) \geq 0$	$\Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0\ [2\pi]$
z est un réel négatif	$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$ et $\mathrm{Re}(z) \leq 0$	$\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi\ [2\pi]$
z est imaginaire pur	$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$	$\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

Configurations

Affixe du milieu M de $[AB]$	$z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
A, B et C sont alignés	$\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
C, A et B sont alignés dans cet ordre	$\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^-$
ABC est un triangle rectangle en A	$\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur
ABC est un triangle direct rectangle en A	$\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est de la forme ki, $k \in \mathbb{R}^{*+}$
ABC est un triangle isocèle en A	$\Leftrightarrow \lvert z_B - z_A\rvert = \lvert z_C - z_A\rvert$
ABC est un triangle rectangle isocèle direct en A	$\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$
ABC est un triangle équilatéral direct	$\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

Transformations

Fonction complexe : $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z' \end{array}$ Transformation du plan : $\begin{array}{ccc} \mathrm{P} & \to & \mathrm{P} \\ M(z) & \mapsto & M'(z') \end{array}$

$z' = z + (a + bi)$	translation de vecteur $a\vec{u} + b\vec{v}$
$z' = -z$	symétrie de centre O
$z' = \bar{z}$	réflexion de droite $(x'x)$
$z' = -\bar{z}$	réflexion de droite $(y'y)$
$z' = kz$, $k \in \mathbb{R}^*$	homothétie de centre O et de rapport k
$z' = iz$	quart de tour direct
$z' = e^{i\theta}z$	rotation de centre O et d'angle θ
$z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$	rotation de centre Ω et d'angle θ
$z' = ke^{i\theta}z$, $k \in \mathbb{R}^{*+}$	similitude directe de centre O, de rapport k et d'angle θ
$z' - z_\Omega = ke^{i\theta}(z - z_\Omega)$, $k \in \mathbb{R}^{*+}$	similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ
$z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$	similitude directe de rapport $\lvert a\rvert$ et d'angle $\arg(a)$
$z' = a\bar{z} + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$	similitude indirecte de rapport $\lvert a\rvert$.