Formulaire d'algèbre

Quotients et fractions

Le dénominateur d'un quotient ne doit pas être nul. Sous cette condition, a, b, c, d, k désignant des entiers, des réels ou des complexes :

Égalité

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Simplifications

$$\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b} \qquad \frac{a}{1} = a \qquad \frac{0}{a} = 0$$

Produit et quotient

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Somme

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Différence

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

Puissances

Le dénominateur d'un quotient ne doit pas être nul. Sous cette condition, a et b étant des réels, n et m étant des entiers relatifs :

$a^n = a \times a \times a \ldots \times a$ (n facteurs, $n \in \mathbb{N}$) $\qquad a^1 = a \qquad a^0 = 1$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^n = \frac{1}{a^{-n}} \qquad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^n a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a^n)^m = a^{nm}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Racines carrées

Les expressions sous une racine carrée (radicandes) doivent être positives. Sous cette condition, a et b désignant des réels :

Définition et conséquences

$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2$ $(b \geq 0)$ $\quad (\sqrt{a})^2 = a$ $\quad \sqrt{a^2} = |a|$

Produits et quotients

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$ $\quad (\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$ $(n \in \mathbb{Z})$ $\quad \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Opérations

Développements et factorisations

$a(b + c) = ab + ac$ $\quad a(b - c) = ab - ac$

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Identités remarquables

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $\quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})$ $(n \in \mathbb{N})$

$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1})$ $(n \in \mathbb{N}$, n impair$)$

Formules

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad (x \neq 1)$$

binôme de Newton :

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{p} a^{n-p}b^p + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}b^p$$

Équations du second degré

Inconnue et coefficients dans $\mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminant).

Si $\Delta < 0$, S = $\varnothing$ (pas de solution dans $\mathbb{R}$).

Si $\Delta = 0$, S = $\{-\frac{b}{2a}\}$ (une solution « double » dans $\mathbb{R}$).

Si $\Delta > 0$, S = $\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\}$ (deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$)

Inconnue et coefficients dans $\mathbb{C}$
$az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminant). Soit δ un complexe tel que $\delta^2 = \Delta$.

S = $\{\frac{-b-\delta}{2a}, \frac{-b+\delta}{2a}\}$.

Propriétés des inégalités

a, b, c et d désignent des réels.

Définition
$a < b \Leftrightarrow b - a$ est strictement positif.

Transitivité
Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.

Addition
Si $a < b$, alors quel que soit le réel c, $a + c < b + c$.

Si $\begin{cases} a < b \\ \text{et} \\ c < d \end{cases}$, alors $a + c < b + d$.

Multiplication
Si $\begin{cases} a < b \\ \text{et} \\ c > 0 \end{cases}$, alors $ac < bc$. Si $\begin{cases} a < b \\ \text{et} \\ c < 0 \end{cases}$, alors $ac > bc$.

Si a, b, c et d sont quatre réels strictement positifs tels que $\begin{cases} a < b \\ \text{et} \\ c < d \end{cases}$, alors $ac < bd$.

Nombres complexes : voir formulaire spécifique

Dénombrements et probabilités : voir formulaire spécifique

