Formulaire de dénombrements et probabilités

Dénombrements

n et p désignent des entiers naturels.

Cardinaux d'ensembles finis
$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)$
$\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(A) \times \mathrm{card}(B)$

Factorielles : nombre de manières d'ordonner n éléments.
$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$ $\qquad$ $0! = 1$

p-listes : nombre de manières de former une liste ordonnée de p éléments pris parmi n avec répétition : n^p.

p-arrangements : nombre de manières de former une liste ordonnée de p éléments pris parmi n sans répétition : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\ldots(n-p+1)$

$A_n^1 = n$ $\qquad$ $A_n^0 = 1$ $\qquad$ $A_0^0 = 1$ $\qquad$ $A_n^n = n!$

Combinaisons, ou coefficients binomiaux : nombre de manières de former un ensemble non ordonné de p éléments pris parmi n sans répétition : $\dbinom{n}{p} = C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$

$\dbinom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p!}$ $\qquad$ $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$

$\dbinom{n}{1} = n$ $\qquad$ $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ $\qquad$ $\dbinom{n}{0} = 1$ $\qquad$ $\dbinom{0}{0} = 1$

$p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$ $\qquad$ $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$

Triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Probabilités

Ω désigne l'univers des possibles, ou ensemble des issues.
A, B, etc. sont des événements.
P est une probabilité sur Ω.

Généralités

$P(\Omega) = 1$

$P(\emptyset) = 0$

$0 \leq P(A) \leq 1$

$P(A^C) = 1 - P(A)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Cas d'équiprobabilité

$P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

Probabilités conditionnelles

$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $(P(B) \neq 0)$

$P(A \cap B) = P(A/B)P(B)$

Formule des probabilités totales (Théorème de Bayes)
Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ est une partition de Ω :
$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \ldots + P(A/B_n)P(B_n)$.

Evénements indépendants

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.