Formulaire de géométrie

Les formules données sont valables dans le plan. Sauf mention contraire, elles se généralisent sans difficulté à l'espace.

Notations

$A(x_A\,;y_A)$, $B(x_B\,;y_B)$, …, $M(x_M\,;y_M)$: coordonnées des points A, B, …, M.
$\vec{u}\,(x\,;y)$, $\vec{v}\,(x'\,;y')$, … : coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, …

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ quelconque

Coordonnées

Point : Le point A a pour couple de coordonnées $(x_A\,;y_A)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ si et seulement si $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$.

Vecteur : Le vecteur $\vec{u}$ a pour couple de coordonnées $(x\,;y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ si et seulement si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Produit d'un vecteur par un réel

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tous réels a, b et c :

$0\vec{u} = \vec{0}$	$a\vec{0} = \vec{0}$
$1\vec{u} = \vec{u}$	$a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$
$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$	$(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

Déterminant

$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$.

Équations de droites

La droite d'équation $y = mx + p$ passe par le point $(0\,;p)$ et admet $\vec{u}\,(1\,;m)$ comme vecteur directeur. Son coefficient directeur est m.

La droite (AB) (non parallèle à l'axe $(O\,;\vec{j})$) admet comme coefficient directeur $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, et comme « ordonnée à l'origine » $p = y_B - mx_B = y_A - mx_A$.

Les droites d'équations $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$.

La droite d'équation $ax + by + c = 0$ admet $\vec{u}\,(-b\,;a)$ comme vecteur directeur. Son coefficient directeur est $-\dfrac{a}{b}$.

Les droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - ba' = 0$.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Distance

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Norme

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Produit scalaire

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$, où H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}$, où K est le projeté orthogonal de B sur (AC)

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(B\hat{A}C)$

Propriétés du produit scalaire

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tous réels a, b et c :

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

$(a\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(a\vec{v}) = a \times (\vec{u}.\vec{v})$

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

$\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Équations de droites

Les droites d'équations $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.

Les droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$.

Équations de cercles

Le cercle de centre $\Omega(x_\Omega ; y_\Omega)$ et de rayon r a pour équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$.

Distance d'un point à une droite

La distance du point $M(x;y)$ à la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est égale à $\dfrac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Expression analytique d'une rotation

$M'(x' ; y')$ est l'image de $M(x ; y)$ par la rotation de centre O et d'angle α si et seulement si $\begin{cases} x' = \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y \\ y' = \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \end{cases}$.

Expression analytique de la symétrie de centre O

$M'(x' ; y')$ est le symétrique de $M(x ; y)$ par rapport à O si et seulement si $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$.

Expression analytique du quart de tour direct

$M'(x' ; y')$ est l'image de $M(x ; y)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ si et seulement si $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$.

Expression analytique de la réflexion de droite d'équation $y = x$

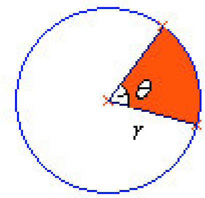
$M'(x' ; y')$ est l'image de $M(x ; y)$ par la réflexion de droite d'équation $y = x$ si et seulement si $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

Relations métriques

La diagonale d d'un carré de côté c vaut $d = \sqrt{2}\, c$.

La hauteur h d'un triangle équilatéral de côté a vaut $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2} a$.

Longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle au centre θ exprimé en radians : $l = r\theta$.
Aire d'une portion de disque de rayon r et d'angle au centre θ exprimé en radians : $A = \dfrac{\theta r^2}{2}$.



Théorème de Pythagore
Si ABC est un triangle rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.
Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Réciproque du théorème de Pythagore
Si le carré d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres, alors ce triangle est rectangle, l'hypoténuse étant le plus long des côtés.
Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors ABC est un triangle rectangle en A.

Formules d'Al Kashi (théorème de Pythagore généralisé)
Dans un triangle ABC, soit $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
Alors $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$. Relations analogues par permutations des sommets.

Trigonométrie du triangle rectangle
Dans un triangle ABC rectangle en A :

$\cos(\hat{B}) = \dfrac{AB}{BC}$ $\qquad$ $\sin(\hat{B}) = \dfrac{AC}{BC}$ $\qquad$ $\tan(\hat{B}) = \dfrac{AC}{AB}$

$\cos(\hat{C}) = \dfrac{AC}{BC}$ $\qquad$ $\sin(\hat{C}) = \dfrac{AB}{BC}$ $\qquad$ $\tan(\hat{C}) = \dfrac{AB}{AC}$

Trigonométrie du triangle
Dans un triangle ABC, soit $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
Alors $\dfrac{\sin(\hat{A})}{a} = \dfrac{\sin(\hat{B})}{b} = \dfrac{\sin(\hat{C})}{c}$.