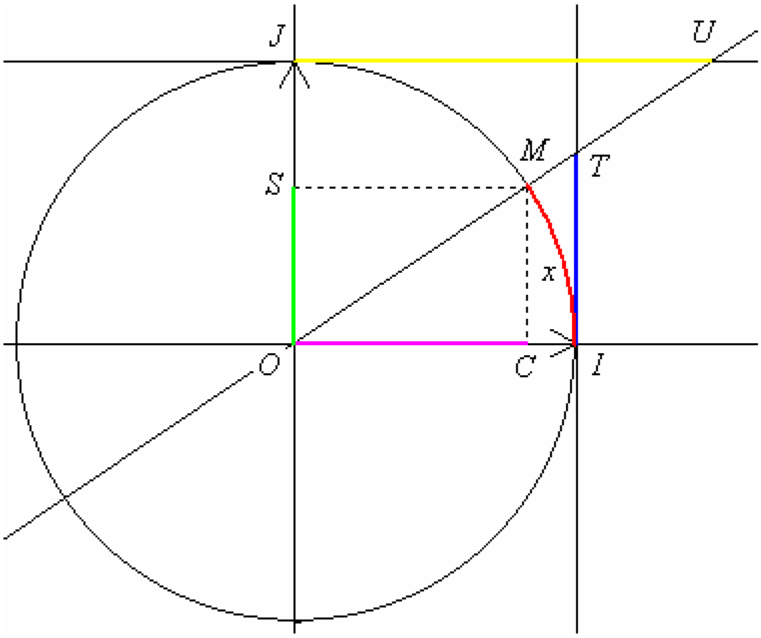
Formulaire de trigonométrie

Définitions



Soit M un point du cercle trigonométrique.
Soit I le point de coordonnées (1 ; 0), et J le point de coordonnées (0 ; 1).

Soit x la mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$. C'est aussi la mesure de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ (rouge).
$\cos x$ est l'abscisse du point M (violet). C'est la mesure algébrique de OC.
$\sin x$ est l'ordonnée du point M (vert). C'est la mesure algébrique de OS.

$\tan x$ est la mesure algébrique de IT (bleu). $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (si $\cos x \neq 0$).

$\text{cotan}\, x$ est la mesure algébrique de JU (jaune). $\text{cotan}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ (si $\sin x \neq 0$).

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nd*	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\text{cotan}\, x$	nd*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	nd*

* : non définie

Formules de « conversion »

	$-x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$	$\pi-x$	$\pi+x$
sin	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
cos	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$
tan	$-\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$-\frac{1}{\tan x}$	$-\tan x$	$\tan x$

Formules fondamentales

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$ $\qquad$ $\cos^2 a = \frac{1}{1+\tan^2 a}$

Trigonométrie du triangle

Dans un triangle ABC quelconque, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$:

Théorème de Pythagore généralisé (Théorème d'AL KASHI) : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$.

$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$ où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC .

Dans un triangle ABC rectangle en A :

$\cos(\hat{B}) = \frac{BA}{BC}$ $\qquad$ $\sin(\hat{B}) = \frac{CA}{BC}$ $\qquad$ $\tan(\hat{B}) = \frac{CA}{BA}$,

$\cos(\hat{C}) = \frac{CA}{BC}$ $\qquad$ $\sin(\hat{C}) = \frac{BA}{BC}$ $\qquad$ $\tan(\hat{C}) = \frac{BA}{CA}$.

Addition des arcs

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$

$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$

$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b$

$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}$

$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \times \cos q}$

$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \times \cos q}$

Multiplication des arcs

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

Formules diverses

$\cos 2a = \dfrac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$

$\sin 2a = \dfrac{2\tan a}{1 + \tan^2 a}$

$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

$\tan \dfrac{a}{2} = \dfrac{\sin a}{1 + \cos a} = \dfrac{1 - \cos a}{\sin a}$

$\cos^2 \dfrac{a}{2} = \dfrac{1 + \cos a}{2}$

$\sin^2 \dfrac{a}{2} = \dfrac{1 - \cos a}{2}$

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$

$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

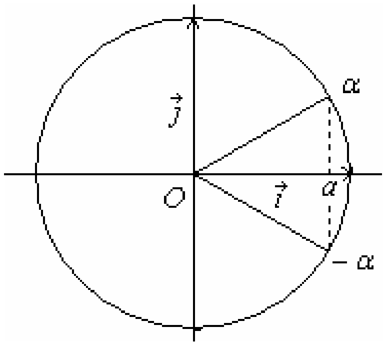
$\tan 3a = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$

Équations trigonométriques

Soit a un réel donné. Soit à résoudre une équation de la forme $\cos x = a$.
Si $|a| > 1$ alors $S = \varnothing$.

Si $|a| \leq 1$, soit un réel α tel que $\cos \alpha = a$.
Alors, $\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow$

$$\left| \begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k'\pi \end{array} \right. , (k, k') \in \mathbb{Z}^2.$$

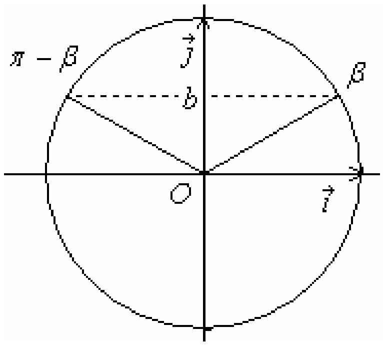


L'ensemble des solutions se représente sur un cercle trigonométrique.

Soit b un réel donné. Soit à résoudre une équation de la forme $\sin x = b$.
Si $|b| > 1$ alors $S = \varnothing$.

Si $|b| \leq 1$, soit un réel β tel que $\sin \beta = b$.
Alors, $\sin x = b \Leftrightarrow \sin x = \sin \beta \Leftrightarrow$

$$\left| \begin{array}{l} x = \beta + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ x = \pi - \beta + 2k'\pi \end{array} \right. , (k, k') \in \mathbb{Z}^2.$$



L'ensemble des solutions se représente sur un cercle trigonométrique.